

# Modulations angulaires

D'une utilisation autrefois limitée du fait de la bande passante qu'elles nécessitent, les modulations angulaires ont maintenant un rôle important, les canaux utilisés en transmission offrant aujourd'hui une bande passante de plus en plus grande, du fait de la montée en fréquence des porteuses. Ce type de modulation présente l'avantage par rapport à la modulation d'amplitude, de présenter une bonne immunité aux bruits, si l'indice de modulation est suffisamment important.

Nous nous intéresserons ici à l'aspect théorique des modulations de signaux analogiques, ce qui permettra de mieux comprendre les modulations des signaux numériques style FSK, PSK et dérivés.

Les deux types de modulations angulaires analogiques sont la modulation de fréquence et la modulation de phase.

Les chronogrammes et spectrogrammes servant d'illustration à cet exposé sont obtenus à partir du logiciel de calcul matriciel Scilab, les programmes étant donnés en annexe.

## 1 Modulation de fréquence d'une porteuse sinusoïdale

### 1.1 Cas d'un signal informatif quelconque

Le signal  $v_m(t)$  obtenu par la modulation d'une porteuse sinusoïdale (ou co sinusoïdale) d'amplitude crête  $V_p$  et de fréquence  $F_p$ , par un signal informatif  $v_i(t)$  a pour expression :

$$v_m(t) = V_p \cos(\varphi(t))$$

la fréquence instantanée s'écrivant :  $f(t) = F_p + k v_i(t)$   
(le paramètre  $k$  étant constant)

on en déduit alors la phase instantanée :  $\varphi(t) = 2\pi \int f(t) dt = 2\pi F_p t + 2\pi k \int v_i(t) dt$

Comme pour les modulations d'amplitudes, une étude préalable en sinusoïdal, même si elle est très éloignée de la réalité pratique, permet de comprendre un certain nombre de phénomènes.

### 1.2 Cas d'un signal informatif sinusoïdal

Prenons  $v_i(t) = V_i \cos(2\pi f_i t)$

d'après les expressions précédentes, on obtient alors :

$$f(t) = F_p + k V_i \cos(2\pi f_i t) = F_p + \Delta f \cos(2\pi f_i t)$$

$$\varphi(t) = 2\pi F_p t + \frac{k V_i}{f_i} \sin(2\pi f_i t) = 2\pi F_p t + \Delta\varphi \sin(2\pi f_i t) = 2\pi F_p t + \frac{\Delta f}{f_i} \sin(2\pi f_i t)$$

on définit alors l'indice de modulation  $m$ , comme l'amplitude crête de l'excursion de phase autour de la phase de la porteuse, à savoir :

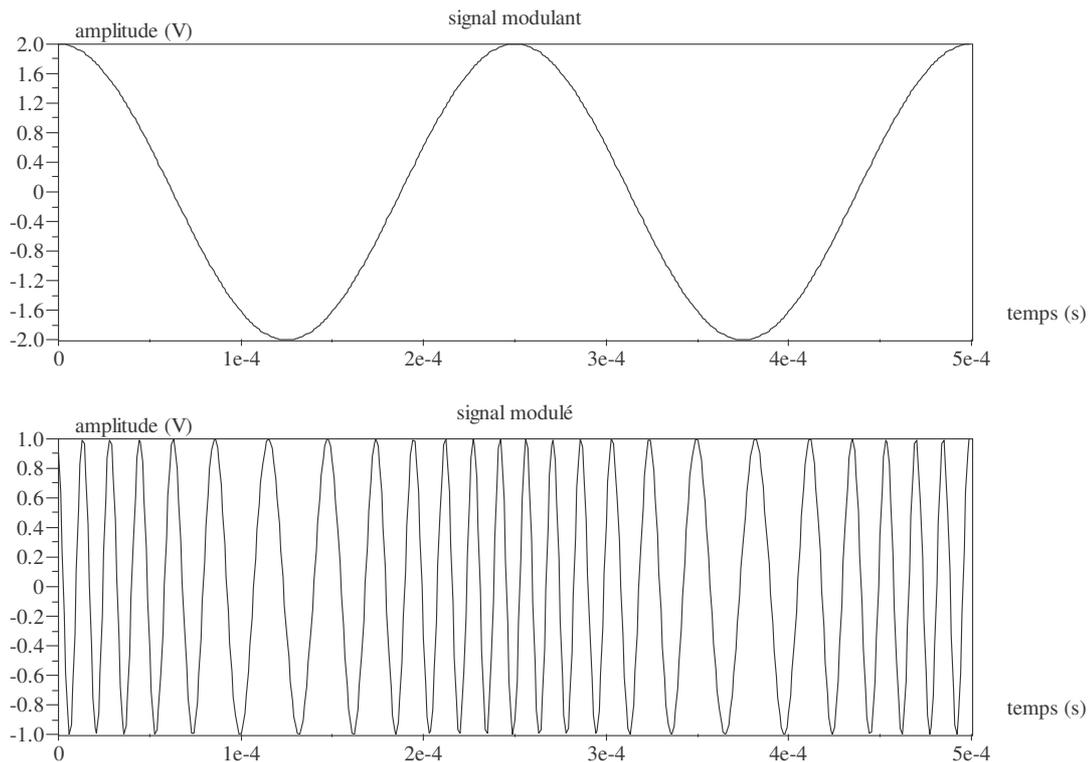
$$m = \Delta\varphi = \frac{\Delta f}{f_i}$$

ce qui permet d'écrire le signal modulé de la manière suivante :

$$v_m(t) = V_p \cos[2\pi F_p t + m \sin(2\pi f_i t)]$$

#### 1.2.1 Représentation temporelle

Les figure ci-après représente les chronogrammes du signal porteur et du signal modulé avec une porteuse de 50 kHz, un signal informatif de 4 kHz et un indice de modulation de 5.



On vérifie bien que lorsque le signal modulant est d'amplitude importante, la fréquence du signal modulé est grande, et inversement. Afin de rendre bien visibles les effets de la modulation, le rapport entre fréquence porteuse et fréquence modulante a été choisi volontairement faible (50/4) par rapport à ce que l'on trouve généralement dans les applications (radiodiffusion par exemple avec une porteuse de 100 MHz et un signal modulant de fréquence maximale de 15 kHz).

### 1.2.2 Représentation spectrale

Le signal modulé ne faisant intervenir que des fonctions périodiques, il est lui-même périodique et donc décomposable en série de Fourier. Ecrivons son expression en faisant apparaître la décomposition en somme du cosinus :

$$\begin{aligned}
 v_m(t) &= V_p \cos [2\pi F_p t + m \sin(2\pi f_i t)] \\
 &= V_p [\cos(\Omega_p t) \cos(m \sin(\omega_i t)) - \sin(\Omega_p t) \sin(m \sin(\omega_i t))] \\
 &\quad \text{avec } \omega_i = 2\pi f_i \quad \text{et } \Omega_p = 2\pi F_p
 \end{aligned}$$

Les décompositions des cosinus de sinus et des sinus de sinus sont données par les fonctions de Bessel.

### 1.2.3 Fonction de Bessel

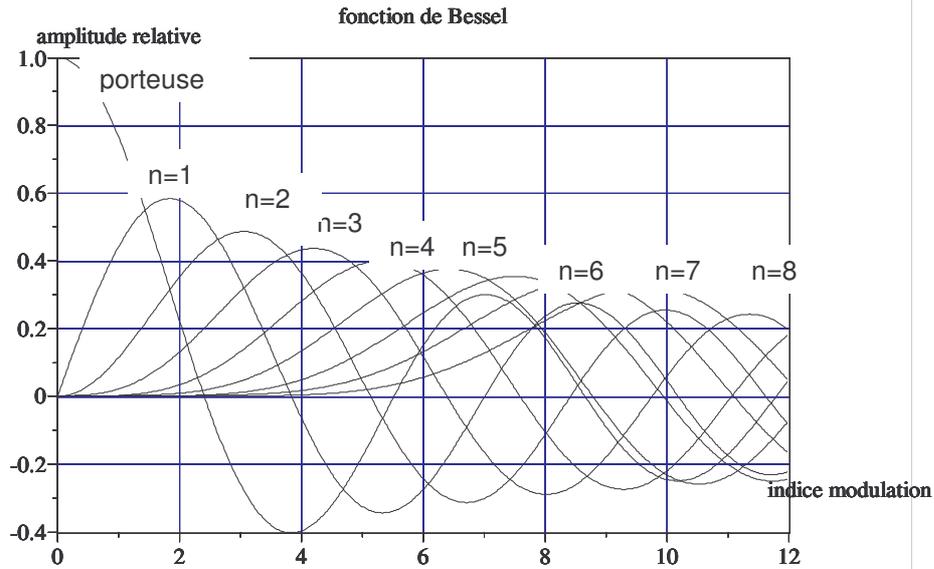
Les deux expressions suivantes permettent de mener à bien notre décomposition :

$$\begin{aligned}
 \cos(m \sin \omega_i t) &= J_0(m) + \sum_{k=1}^{\infty} [2 J_{2k}(m) \cos(2k \omega_i t)] \\
 \sin(m \sin \omega_i t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [2 J_{2k+1}(m) \sin((2k+1) \omega_i t)]
 \end{aligned}$$

Les coefficients  $J_n(m)$  pour l'harmonique de rang  $n$  et un indice de modulation  $m$ , peuvent être calculés par l'expression suivante :

$$J_n(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m \sin(\theta) - n \theta) d\theta$$

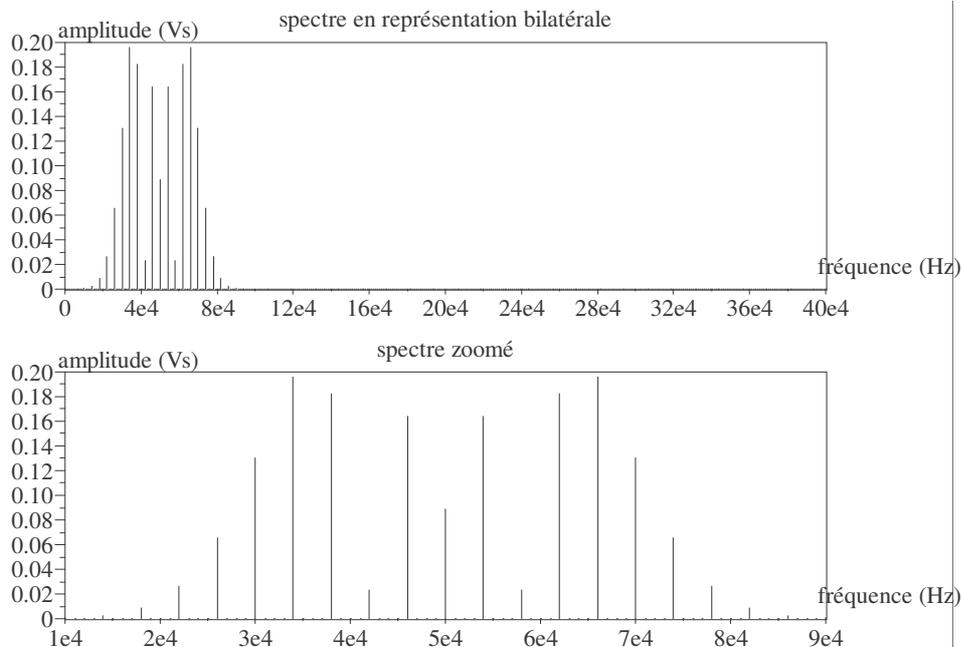
La figure suivante représente pour les huit premiers rangs l'évolution du coefficient  $J$  en fonction de l'indice de modulation  $m$ .



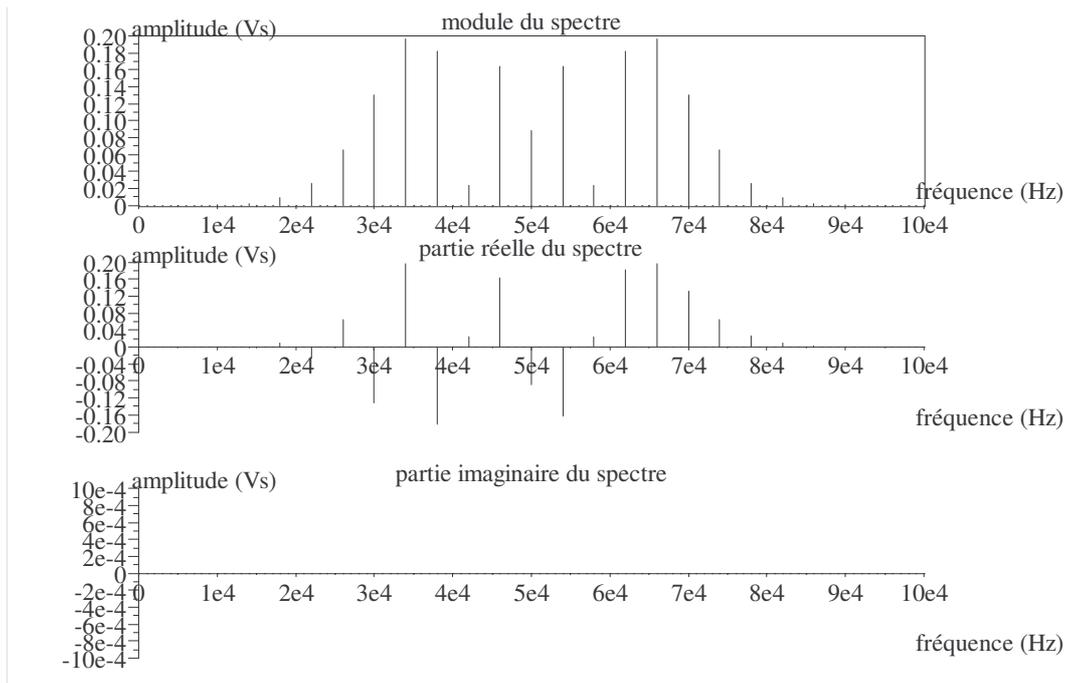
La première expression de Bessel met en évidence de termes en cosinus de rang pair  $2k\omega_i$ , qui associé au  $\cos(\Omega_p t)$  (voir expression du signal modulé), donneront des raies à la fréquence porteuse et aux fréquences  $\Omega_p \pm 2k \omega_i$ .

La seconde expression de Bessel met en évidence l'apparition de termes en sinus de rang impair  $(2k+1)\omega_i$ , qui associé au  $\sin(\Omega_p t)$  (voir expression du signal modulé), donnera des raies aux fréquences  $\Omega_p \pm (2k + 1) \omega_i$ .

La figure suivante donne une représentation bilatérale de la partie fréquence positive du module du spectre du signal FM précédent (porteuse à 50 kHz, modulant à 4 kHz et indice de modulation 5). La lecture des coefficients sur la figure précédente permet de déterminer l'amplitude de chaque raie (attention au rapport 1/2 dû à la représentation bilatérale) : pour la porteuse à 50 kHz, on peut lire environ -0,18 (soit une raie à 0,09), pour les raies de rang 1 à 46 et 54 kHz, on lit environ -0,34 (soit 0,17 sur le spectre), pour les raies de rang 2 à 42 et 58 kHz, on lit environ 0,05 etc...



Le spectrogramme précédent met en évidence une symétrie du module ; une étude plus approfondie sur la partie réelle et imaginaire fait disparaître cette symétrie. Il ne sera donc pas possible de faire de la « bande latérale unique » en modulation de fréquence.



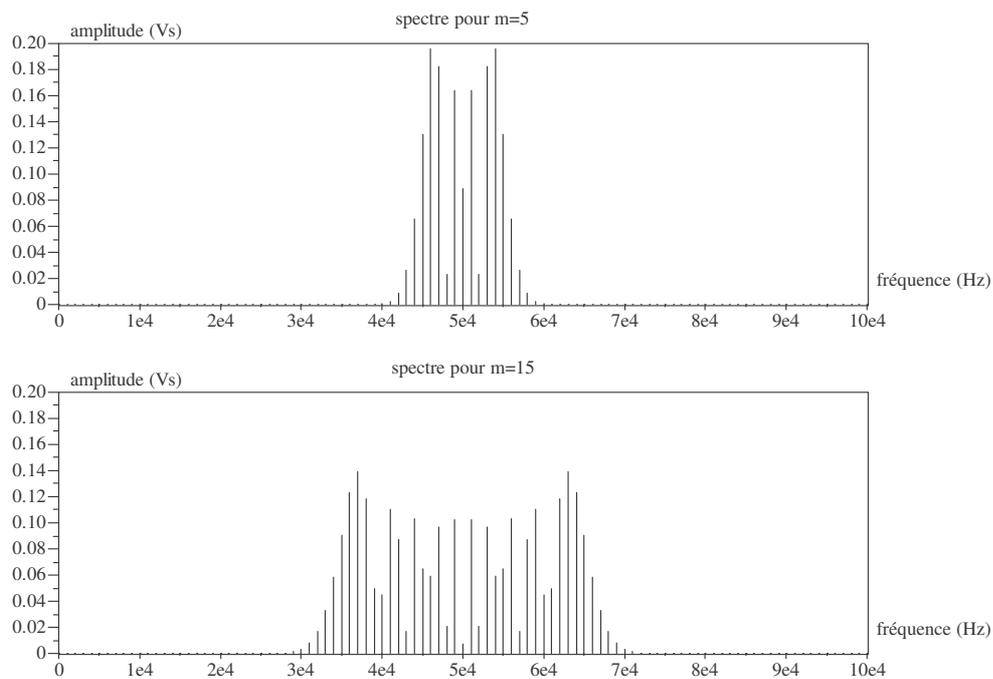
## 1.2.4 Propriétés spectrales

### 1.2.4.1 Puissance émise

Une étude intuitive de l'expression du signal modulé montre que la puissance émise ne dépend pas du signal modulant ni de l'indice de modulation (contrairement à la modulation d'amplitude), mais uniquement de l'amplitude de la porteuse. Augmenter l'indice de modulation aura donc pour effet d'élargir le spectre en diminuant l'amplitude de chaque raie. Les coefficients de Bessel vérifient en effet la relation :

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) = 1$$

A titre d'exemple, la figure suivante représente le spectre du signal de 50 kHz modulé par un signal de 1 kHz avec un indice de modulation de 5 sur la première figure et 15 sur la seconde.



#### 1.2.4.2 Bande passante nécessaire

Comme le montre les différentes relations de Bessel ainsi que les spectrogrammes, la bande passante nécessaire à la transmission d'un signal modulé en fréquence est théoriquement infinie. Cependant, Carson a montré que 98% de la puissance émise se trouvait dans une bande de fréquence  $B_C$  qui porte désormais son nom, et qui a pour expression :

$$B_C = 2(f_i + \Delta f) = 2(m + 1) f_i$$

Augmenter le coefficient de modulation, et donc la qualité de la transmission, ne se paye pas par une augmentation de puissance comme en modulation d'amplitude, mais par un élargissement de la bande passante nécessaire. On pourra observer ce phénomène sur les spectrogrammes précédents.

Remarque : il ne faut pas confondre la bande de Carson  $B_C$  et l'excursion de fréquence  $\Delta f$  autour de la porteuse

#### 1.2.4.3 Indice particulier

On peut remarquer sur les courbes des coefficients de Bessel en fonction de l'indice de modulation, que pour la valeur de  $m=2,4$  la raie correspondant à la porteuse disparaît. Cette particularité peut éventuellement servir pour étalonner un émetteur en fonction de l'indice d'émission.

#### 1.2.4.4 Cas des faibles indices de modulation

Lorsque l'indice de modulation est faible devant 1, la bande de fréquence nécessaire devient :

$$B_C = 2 f_i$$

comme en modulation d'amplitude. L'intérêt en terme de télécommunication est faible (on perd le principal avantage de ce type de modulation, à savoir la bonne immunité aux bruits), mais on trouvera cependant une application dans la réalisation de certains modulateurs. En effet, l'un des problèmes à résoudre dans la réalisation d'un modulateur FM est l'absence de linéarité vis à vis de la tension de commande des oscillateurs commandés en tension, si l'excursion de fréquence est importante.

### 1.3 Retour au cas d'un signal modulant quelconque

Contrairement à la modulation d'amplitude, les relations ne sont pas linéaires (cosinus de sinus) et on ne peut appliquer le théorème de superposition. Cependant de ce qui précède on peut extrapoler quelques règles, à partir de l'excursion de fréquence  $\Delta f = k \left| v_i(t) \right|_{\max}$  :

- l'indice de modulation est défini par  $m = \frac{\Delta f}{f_{i \max}}$
- la bande de Carson devient  $B_C = 2(m+1) f_{i \max}$

## 2 Modulation de phase d'une porteuse sinusoïdal

### 2.1 Cas d'un signal informatif quelconque

Le signal  $v_m(t)$  obtenu par la modulation d'une porteuse sinusoïdale (ou co sinusoïdale) d'amplitude crête  $V_p$  et de fréquence  $F_p$ , par un signal informatif  $v_i(t)$  a pour expression :

$$v_m(t) = V_p \cos(\varphi(t))$$

la phase instantanée s'écrit :

$$\varphi(t) = 2\pi F_p t + k_p v_i(t)$$

(le paramètre  $k_p$  étant constant)

la fréquence instantanée a alors pour expression :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = F_p + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dv_i(t)}{dt}$$

Comme précédemment, une étude préalable en sinusoïdal, même si elle est très éloignée de la réalité pratique, permet de comprendre un certain nombre de phénomènes.

### 2.2 Cas d'un signal informatif sinusoïdal

Prenons  $v_i(t) = V_i \cos(2\pi f_i t)$

d'après les expressions précédentes, on obtient alors :

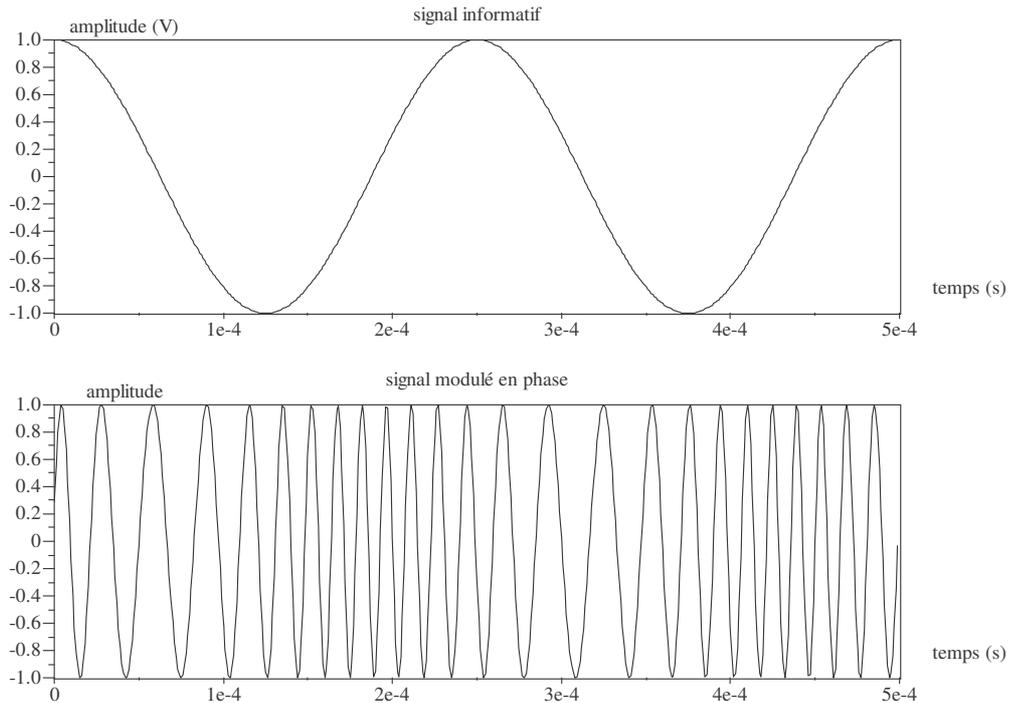
$$f(t) = F_p - \frac{k_p}{2\pi} V_i \omega_i \sin(2\pi f_i t) = F_p - k_p V_i f_i \sin(2\pi f_i t) = F_p - \Delta f \sin(2\pi f_i t)$$

$$\varphi(t) = 2\pi F_p t + k_p V_i \cos(2\pi f_i t) = 2\pi F_p t + \Delta\varphi \cos(2\pi f_i t)$$

l'indice de modulation, toujours défini par l'excursion maximal de phase vaut :  $m = \Delta\varphi = k_p V_i$   
la bande de Carson a toujours la même expression  $B_C = 2(m+1) f_i$

L'étude spectrale se fera de la même manière que pour la modulation de fréquence.

La figure suivante représente un signal modulé en phase dans les mêmes conditions que le premier signal modulé en fréquence (porteuse à 50 kHz, modulant à 4 kHz et indice de modulation de 5).

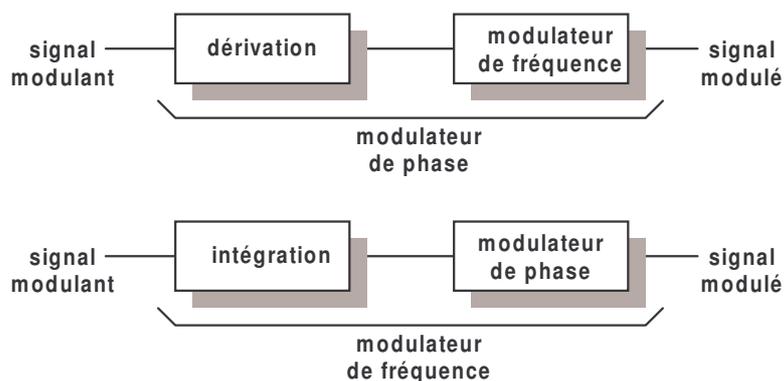


On remarque bien que cette fois la fréquence du signal modulé est sensible non plus à l'amplitude du signal modulant comme dans le cas de la modulation FM, mais à la dérivée de celui-ci, comme le montre les équations.

### 3 Comparaison des modulations de fréquence et de phase

#### 3.1 Passage d'une modulation à l'autre

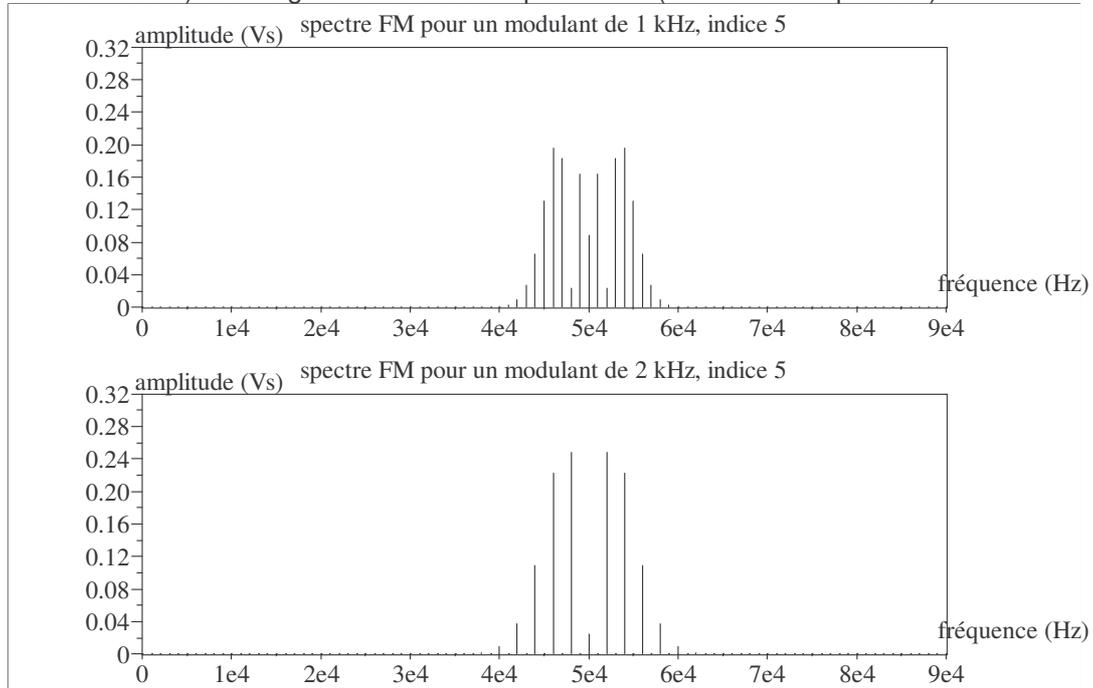
Les relations précédentes concernant la fréquence et la phase instantanée mettent en évidence que l'on passe de l'une à l'autre par une intégration ou une dérivation, comme l'indique la figure suivante :



### 3.2 Evolution de la bande passante

Si l'indice de modulation est suffisamment important, en modulation de fréquence, la bande passante nécessaire est indépendante de la fréquence du signal modulant : en effet la bande de Carson peut s'écrire  $B_C = 2(m + 1) f_i \cong 2 m f_i = 2 k V_i$  ;

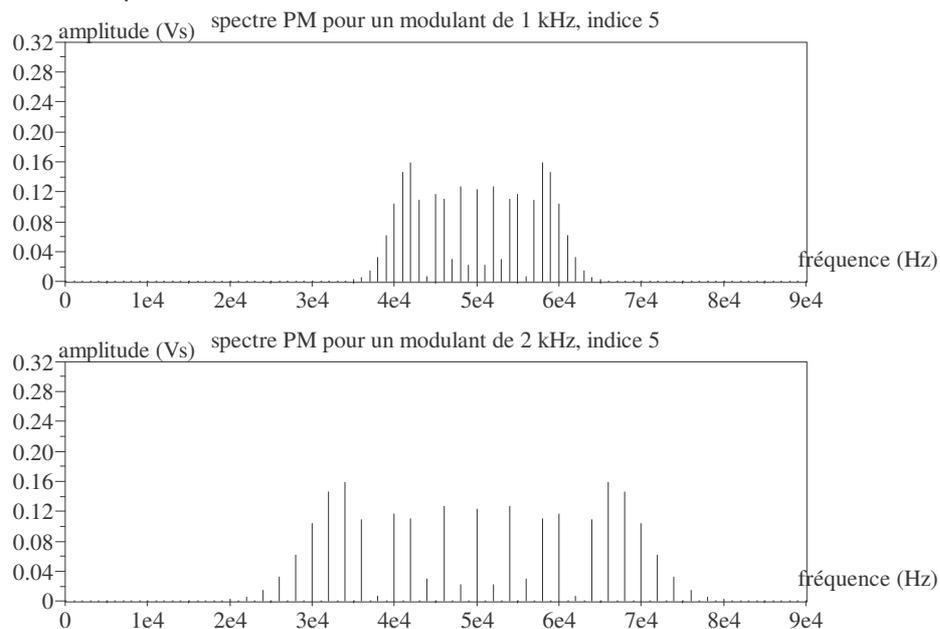
Les spectrogrammes suivants illustrent cette propriété pour un indice de modulation de 5 (ce qui reste relativement modéré) et un signal modulant de 1 puis 2 kHz (de mêmes amplitudes) :



On ne remarque pas de différences importantes en ce qui concerne la bande passante nécessaire sur le spectrogramme.

En modulation de phase par contre, nous avons  $B_C = 2(m + 1) f_i \cong 2 m f_i = 2 k_p V_i f_i$ , la bande nécessaire dépend de la fréquence du signal modulant.

Les spectrogrammes suivants reprennent les mêmes conditions que les précédents, mais cette fois avec une modulation de phase :



On remarque cette fois un élargissement important de la bande passante.

Une bonne utilisation d'un canal de transmission correspondant à une densité spectrale de valeur constante sur toute la bande passante, l'utilisation ne sera donc pas optimale en modulation de phase, la place prise dans le canal variant de manière importante avec la fréquence du signal modulant.

Avec la modulation de fréquence par contre, l'indice de modulation qui a pour expression  $m = \Delta\varphi = \frac{\Delta f}{f_c}$  diminue lorsque la fréquence du signal modulant augmente. La qualité de la transmission diminue donc également (l'excursion de fréquence diminuant, la transmission devient plus sensible aux bruits).

C'est pour ces raisons que les systèmes analogique de modulations angulaires utilisent la modulation de fréquence pour les basses fréquences du signal modulant et la modulation de phase dès que la fréquence augmente.

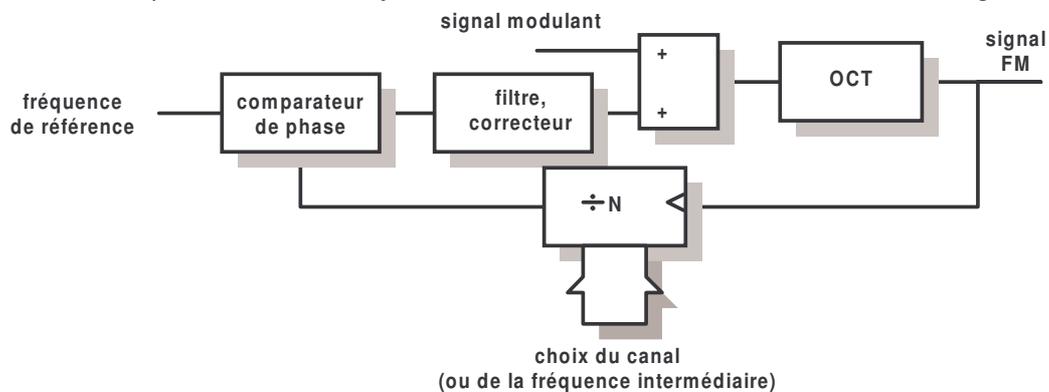
En radio diffusion FM par exemple, dans la bande 88 – 108 MHz, le signal audio, dont la bande passante est préalablement limitée à 15 kHz, subit une pré-accélération à partir de 2,1 kHz par un filtre présentant à partir de cette fréquence une pente de 20 dB/dec (donc un comportement dérivateur). Le signal module ensuite la porteuse en fréquence avec un indice de modulation de 5. La transmission peut donc être vue comme une modulation de fréquence jusqu'à 2,1 kHz puis comme une modulation de phase par la suite. La bande passante nécessaire à l'opération est donc  $2 \times (5+1) \times 15$  soit 180 kHz.

## 4 Structure d'un modulateur

La conception d'un modulateur FM se heurte aux problèmes suivants :

- stabilité de la fréquence d'émission
- difficulté d'obtenir une excursion de fréquence suffisante
- non-linéarité du modulateur.

La solution classiquement retenue aujourd'hui consiste à utiliser une boucle à verrouillage de phase :

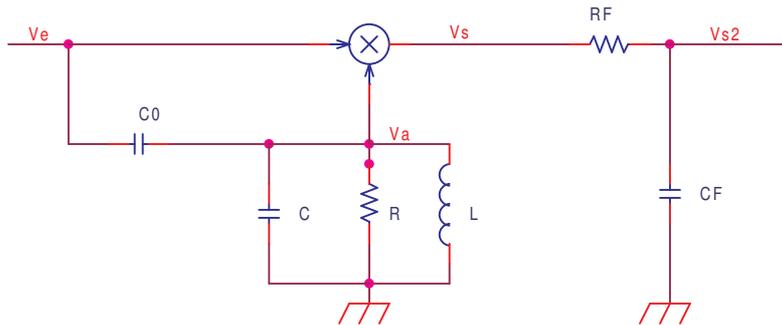


La modulation est réalisée soit directement à la fréquence d'émission, soit en fréquence intermédiaire, un changement de fréquence effectué en aval dans l'émetteur permettant de passer à la fréquence d'émission souhaitée. Dans tous les cas la boucle doit être suffisamment lente pour ne pas compenser les variations du signal modulant, faute de quoi la fréquence de sortie reste constante.

Une solution purement numérique utilisant les principes de la synthèse numérique directe est également envisageable.

## 5 Structure du démodulateur

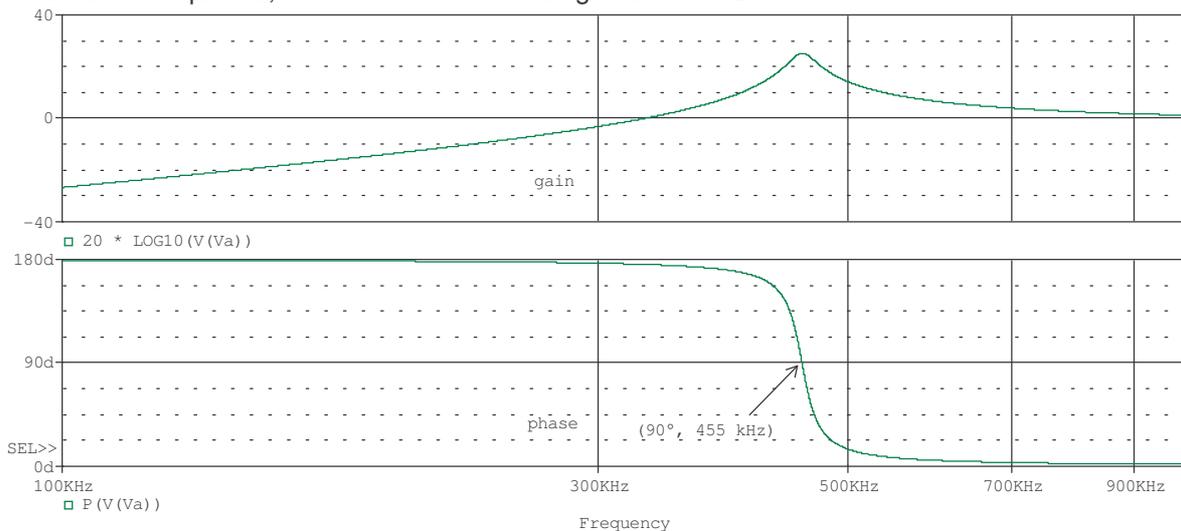
Le circuit le plus classique pour la démodulation d'amplitude est le détecteur de quadrature, dont le schéma est présenté ci-après :



Le signal  $V_e$  est le signal modulé (généralement en fréquence intermédiaire dans le récepteur) ; il attaque une des entrées d'un multiplieur, l'autre entrée étant attaquée par le même signal passé par le filtre passe haut constitué de  $C_0$ ,  $C$ ,  $R$  et  $L$ . La fonction de transfert d'un tel filtre à pour expression :

$$\frac{V_a}{V_e} = K \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad K = \frac{C_0}{C + C_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_0)}} \quad Q = \frac{R}{L\omega_0}$$

En choisissant la pulsation propre  $\omega_0$  égale à la pulsation porteuse ( $2\pi \cdot 455 \cdot 10^3$  krd/s dans l'exemple suivant) et un coefficient de qualité  $Q$  d'environ 20, on remarque qu'autour de cette fréquence propre, le gain du filtre est sensiblement constant, tandis que la phase évolue linéairement autour de  $90^\circ$  en fonction de la fréquence, comme le montre les diagrammes de Bode suivants :



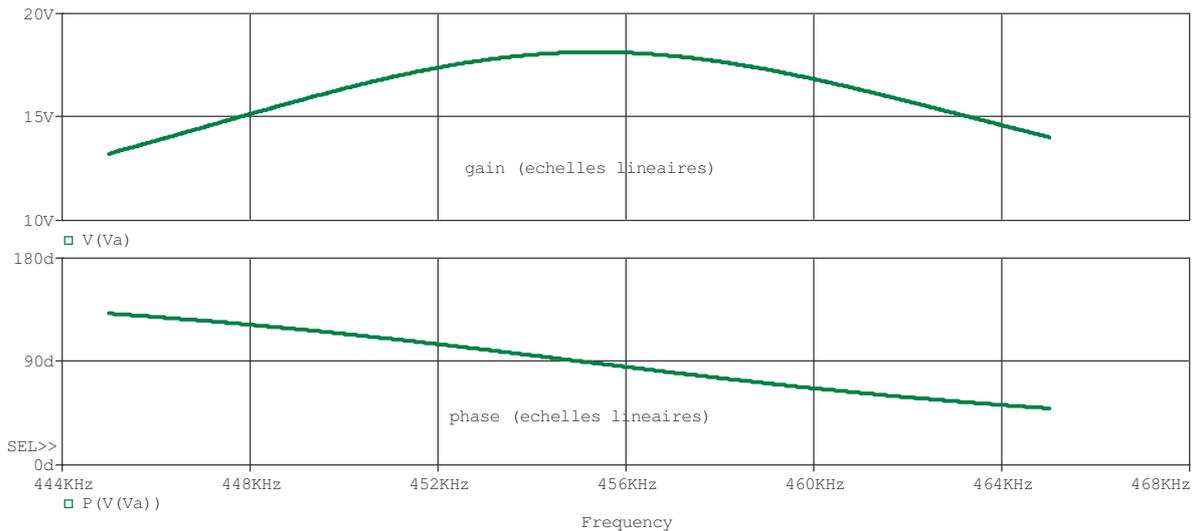
En sortie du multiplieur on retrouve donc un signal à deux fois la fréquence porteuse, qui sera supprimé par le circuit passe bas  $RF.CF$ , ainsi qu'un terme basse fréquence :

$$\frac{V_e \max}{2} \cdot \frac{V_a \max}{2} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_e \max}{2} \cdot \frac{V_a \max}{2} \sin \varphi$$

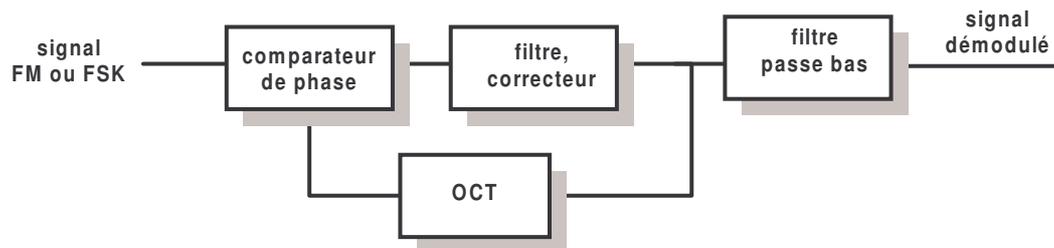
$V_e \max$  et  $V_a \max$  représentant les amplitudes crête des signaux à l'entrée du multiplieur et  $\varphi$  leur déphasage. Ce dernier terme contient l'information à extraire. Si le déphasage est faible, on peut alors assimiler  $\sin \varphi$  à  $\varphi$  et le signal modulant se retrouve en  $V_{s2}$ .

Le multiplieur est généralement intégré dans un circuit qui réalise les autres fonctions nécessaires à une réception de type super hétérodyne ; citons par exemple le classique MC3363 de chez Motorola. L'inductance est généralement réglable afin d'accorder parfaitement la fréquence de réception.

On trouvera ci-après un agrandissement de la partie intéressante du diagramme de Bode, cette fois en échelles linéaires.



Il est également possible d'utiliser une boucle à verrouillage de phase, en injectant le signal à démoduler en entrée ; si les éléments sont correctement calculés, la tension d'entrée de l'OCT suivra alors les variations de la fréquence d'entrée et reproduira donc le signal modulant, à une ondulation près qui sera supprimée par le filtre passe bas. L'information étant contenue dans la fréquence du signal, la boucle pourra être de type semi-numérique ou même numérique, le signal d'entrée ayant été échantillonné.



## Bibliographie

Introduction au traitement du signal avec Scilab du même auteur sur <http://www.artemis.fr>  
 Transmission de l'information par P. Fraisse, R. Protière et D. Marty-Dessus chez Ellipse  
 Technologie des télécoms par P. Lecoy chez Hermès  
 Principes fondamentaux des télécommunications par P. Clerc et P. Xavier chez Ellipse

## Annexe : programmes Scilab

### Modulation de fréquence

Le programme suivant propose l'affichage temporel et spectral d'un signal modulé en fréquence ; on se référera à la référence sur Scilab cité en bibliographie pour une analyse détaillée des instructions. Le signal modulant proposé ici est une co sinusoïde, mais le programme peut être adapté à n'importe quelle forme.

```
clear; stacksize(1.5e6);
//
// définition des constantes et du temps : nombre de points, fréquence d'échantillonnage,
// fréquence porteuse, fréquence modulante, amplitude modulante, vecteurs temps,
// indice de modulation
N=1000 ; fe=1e6 ; fp=50e3 ; Finf=4e3; Uinf=2; t=1/fe*(0:N-1); ind=5;
//
// définition du signal informatif
sinf=Uinf*cos(2*%pi*Finf*t);
//
// définition du vecteur fréquence
f_inst=fp*ones(1,N)+ ind* Finf /Uinf*sinf;
//
// définition de la phase
theta=2*%pi/fe*f_inst*triu(ones(N, N));
//
// calcul du signal modulé
smod=cos(theta);
//
// affichage temporel
xset("window",0); xbas(0);xset("font size",4);
    xsetech([0,0,1,1/2]) ; plot2d(t,sinf) ; xtitle("signal modulant","temps (s)","amplitude (V)");
    xsetech([0,1/2,1,1/2]) ; plot2d(t,smod) ; xtitle("signal modulé","temps (s)","amplitude (V)");
//
// définition de l'échelle de fréquence et calcul du spectre
f=fe/N*(0:N-1);
S=fft(smod,-1);
//
// affichage spectral
xset("window",1); xbas(1);xset("font size",5);
    xsetech([0,0,1,1/2]) ; plot2d3(f,1/N*abs(S), rect=[0, 0, fe/2.5, 0.2]);
    xtitle("spectre en représentation bilatérale","fréquence (Hz)","amplitude (Vs)");
    xsetech([0,1/2,1,1/2]) ; plot2d3(f,1/N*abs(S), rect=[.2*N^2*fp/fe, 0,1.8*N^2*fp/fe, 0.2]);
    xtitle("spectre zoomé","fréquence (Hz)","amplitude (Vs)");
//
```

L'intégrateur numérique utilisé dans le programme précédent introduit un léger déphasage préjudiciable à une étude précise des parties réelles et imaginaires de la transformée de Fourier du signal modulé. Aussi, préférera-t-on le programme suivant pour une étude fine d'un signal modulant de type cosinus.

```
clear; stacksize(1.5e6);
//
// définition des constantes et du temps
N=1000 ; fe=1e6 ; fp=50e3 ; Finf=4e3; Uinf=2; t=1/fe*(0:N-1); ind=5;
//
// définition du signal modulant
sinf=Uinf*cos(2*%pi*Finf*t);
```

```

// calcul du signal modulé
smod=cos(2*%pi* fp*t+ ind*sin(2*%pi*Finf*t));
//
// affichage temporel
xset("window",0); xbas(0);xset("font size",4);
  xsetech([0,0,1,1/2]) ; plot2d(t,sinf) ; xtitle("signal modulant","temps (s)","amplitude (V)");
  xsetech([0,1/2,1,1/2]) ; plot2d(t,smod) ; xtitle("signal modulé","temps (s)","amplitude (V)");
//
// définition de l'échelle de fréquence et calcul du spectre
f=fe/N*(0:N-1);
S=fft(smod,-1);
//
// affichage spectral des parties réelles et imaginaires
xset("window",1); xbas(1);xset("font size",5);
  xsetech([0,0,1,1/3]) ; plot2d3(f,1/N*abs(S), rect=[0, 0,02*N^2*fp/fe, 0.2]);
  xtitle("module du spectre","fréquence (Hz)","amplitude (Vs)");
  xsetech([0,1/3,1,1/3]) ;
  plot2d3(f,1/N*real(S), rect=[0, -0.2, 02*N^2*fp/fe, 0.2], axesflag=[5]);
  xtitle("partie réelle du spectre","fréquence (Hz)","amplitude (Vs)");
  xsetech([0,2/3,1,1/3]) ;
  plot2d3(f,1/N*imag(S), rect=[0, -0.001, 02*N^2*fp/fe, 0.001], axesflag=[5]);
  xtitle("partie imaginaire du spectre","fréquence (Hz)","amplitude (Vs)");
//

```

## Modulation de phase

```

clear
// définition des constantes
N=500 ; fe=1e6 ; fp=50e3 ; finf=4e3; ind=5;
//
// description des vecteurs temps et signal
t=(0:N-1)/fe ;
//
sinf=1*cos(2*%pi*finf*t);
smod= 1*cos(2*%pi*fp*t + ind*sinf);
//
// 'affichage
xbas() ; xset( "font size", 4);
xsetech([0,0,1,1/2]) ; plot2d(t,sinf) ; xtitle("signal informatif","temps (s)","amplitude (V)");
// affichage du signal modulé
xsetech([0,1/2,1,1/2]) ; plot2d(t, smod) ;
xtitle("signal modulé en phase","temps (s)", "amplitude");

```

## Tracé des fonctions de Bessel

```
clear ; stacksize(1.5e6);
//
// définition du nombre de points, de l'indice de modulation maximal, du nombre d'harmonique
N=500; Mmax=12; harmo=8;
//
// définition de l'angle d'intégration
theta=%pi/N*[0:N-1];
//
// définition de la plage de variation de l'indice de modulation
m=Mmax/N*[0:N-1];
//
// définition d'une matrice contenant les différents indices
J=zeros(harmo+1,N);
//
// initialisation de l'affichage
xbasc(); xset("font size",5);
//
// calcul et affichage des fonctions pour 8 fréquences harmoniques et la porteuse
for n=0:harmo,
J(n+1,:)= 1/N*(sum (cos(m.* sin(theta) - n*ones(N,1)*theta),'c'));
plot2d(m,J(n+1,:), rect=[ 0, -0.4, 12, 1]);
end;
xgrid(2) ;
xtitle ("fonction de Bessel","indice modulation", "amplitude relative");
```